الخامسة 		الخميس 2015/11/12

تعريف القفزة:

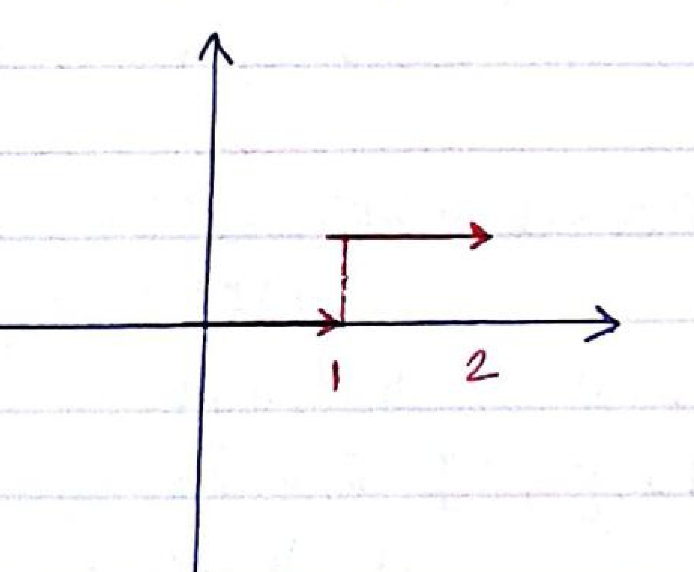
إن العدد $f(x_0+0)-f(x_0)$ يسمى قفزة الدالة من اليمين في النقطة $a<x_0<b$.
ويسمى العدد: $f(x_0)-f(x_0-0)$ قفزة الدالة من اليسار في النقطة:
$a<x_0<b$.
أما العدد $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ يسمى قفزة الدالة f في النقطة $a<x_0<b$

ملاحظة:
عند النقطة $x=a$ الطرف اليمين للفترة $[a,b]$ فيدور الحديث عن القفزة من اليمين وعند النقطة $x=b$ الطرف اليساري للفترة $[a,b]$ يدور الحديث عن القفزة من اليسار.

نتيجة:
الانقطاع من النوع الأول في $a<x_0<b$ يعني أن القفزة تكون عادةً قيمة عددية

مثال:
دالة أكبر عدد صحيح (أقل أو يساوي أو الدالة الدرجية كما يسميه).
$y=f(x)=[x]$.
عند $x_0=1$ وعند كل عدد صحيح من $\mathbb{Z}$ (لا نكتب Z بل $\mathbb{Z}$).
تملك قفزة تساوي الواحد الصحيح. حيث:

$$[x]=\begin{cases}0 & ; \quad 0\le x<1\\ 1 & ; \quad 1\le x<2 \quad ; \quad x\in[0,2].\\ 2 & ; \quad x=2\end{cases}$$



$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}[x]=1$ (*1)
نقيم من اليمين

$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}[x]=0$ (*2)
من اليسار

من (*1)، (*2):

$\underset{f(1+0)}{[1+0]}-\underset{f(1-0)}{[1-0]}=1$

وهكذا عند كل عدد $\in \mathbb{Z}$

مبرهنة:

نقاط انقطاع الدوال المطردة المعرفة على الفترة $[a,b]$ هي نقاط انقطاع من النوع الأول. وأضف إلى ذلك بشكل خاص إن مجموعة نقاط الانقطاع للدالة المتزايدة f على الفترة $[a,b]$ هي مجموعة على الأكثر عدودة (منتهية أو غير منتهية) وإذا كانت النقاط مجموعة غير منتهية مثل:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

من الفترة (a,b) المفتوحة من داخلها تكون f غير مستمرة فإنه يكون:

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leq f(b) - f(a).$$

هذا إذا كانت المجموعة غير منتهية.

أما إذا كانت منتهية وكانت الدالة f متزايدة على الفترة $[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + \dots \leq f(b) - f(a).$$

حيث المجموعة من الشكل: $\{x_1, \dots, x_n\}$.

مثال واجب:

طبق ذلك على الدالة الدرجية المعرفة على الفترة $[0,3]$ وتحقق من صحة المتراجحة الأخيرة.

نتيجة:

مجموعة نقاط انقطاع الدالة المطردة f على الفترة $[a,b]$ هي مجموعة منتهية.

مثال:

إن الدالة الدرجية المتزايدة: $y = f(x) = [x]$

على الفترة $[0,3]$ تملك نقطتي انقطاع داخليتين وعند النقطة $x=b=3$ فقط من اليسار.

ملاحظة:

القفزة من اليمين عند كل عدد صحيح (بداية الفترة للعدد الصحيح) تساوي

الصفر.

مثال: (إمكانية الدالة على شكل [illegible] فرق دالتين محدودتين):

يمكننا التعبير عن الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & \quad x = 1 \\ x + 7 & \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

على شكل [illegible] فرق دالتين متزايدتين ومحدودتين على الفترة: $[0,2]$ بالصورة:

$$g = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x + 9 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

الدالة متزايدة.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

تكون الدالة بهذا الشكل د.ت.م لأنه كتبت على شكل فرق دالتين متزايدتين و محدودتين.

مثال آخر:

$$\langle x \rangle = x - [x].$$

فرق دالتين متزايدتين ومحدودتين. حيث د.ت.م على الفترة $[0,3]$ لأنه كتبت على شكل فرق دالتين متزايدتين ومحدودتين.

$\langle 6٢ \rangle$

اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a,b]$ ومشتقتها الأولى محدودة أي $|f'|$ $|f'(x)| \le L$ على $[a,b]$ ، $]a,b[$ ، ... تكون الدالة د.ت.م على هذه الفترة ، حيث L ثابت موجب.

الإثبات:

من أجل ذلك نعود إلى تعريف الدالة د.ت.م.

لنفرض أن: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$a \le x < y \le b.$$

نطبق إذن مبرهنة القيمة الوسطى " لاغرانج أو التزايدات المحدودة " على الدالة f في الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ فنحصل على:

$$\Delta f(x_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$= f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) \; ; \; t_k \in \,]x_{k-1}, x_k[$$

عندئذٍ نأخذ المجموع للطرفين:

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x_k)| = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq L \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = L(b-a).$$

ومنه بشكل تكون الدالة ذ.ت.م في حال كان المشتق بطول محدود.

ملاحظة:

في حال كان المشتق بطول مشتقة دالة على فترة ما محدوداً فهذا يكفي أي أنه شرط كافي لتكون الدالة ذ.ت.م.

ولكن إذا أخذنا الدالة $y = \sqrt{x}$ فإن هذه الدالة متزايدة تماماً على الفترة $[0, 2]$ فهي ذ.ت.م عليها مع أن مشتقها غير محدود حيث:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

أي f' غير محدود في أي فترة تحوي الصفر.

إذاً هذا المثال يوضح أن كون f' محدودة ليس لازم أو ضروري لتكون الدالة f ذ.ت.م على أي فترة ولكنه كافي.

مثال:

$$g(x) = \sin x.$$

$$|g'(x)| = |\cos x| \leq 1 \; ; \; x \in \mathbb{R}.$$

فالدالة g ذ.ت.م على $\mathbb{R}$.

مثال:

الدالة D المعرفة بالشكل:

$$D(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin \frac{1}{1-x} & ; \; 1 < x \leq 2 \\ 0 & ; \; x = 1 \end{cases}$$

بيّن من خلال المشتق الأول اذا كانت الدالة ذ.ت.م على الفترة [1, 2] .

〈 تكامل ستيلجس 〉

في هذا الفصل سوف نقوم تعميماً لتكامل ريمان المعروف لدينا بـ :

$$I = (R) \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

والذي فيه تكامل دالة بالنسبة لمتغير مع أن الدالة محدودة على الفترة $[a, b]$ وكما يمكننا تعميم هذا التكامل على فترات غير محدودة لنحصل على التكاملات المعتلة من النوعين الأول والثاني.

وهذا التعميم هو تكامل ستيلجس حيث نتعامل مع دالتين وليس دالة واحدة على الفترة $[a, b]$ والذي يمكن تعميمه على فترات غير محدودة. والذي نرمز له بـ :

$$J = (S) \int_{x=a}^{b} f(x) \cdot dg(x).$$

① تعريف أو مفهوم تكامل ستيلجس = (الدالة بالنسبة لدالة):

لتكن f, g دالتان معرفتان على $[a, b]$ ومحدودتان عليه.

حيث: $(|g| \leq M_2 \quad , \quad |f| \leq M_1)$

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ولتكن P تجزئة للفترة $[a, b]$ بالشكل:

$$P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \}$$

و z_k نقطة اختيارية من الفترة $[x_{k-1}, x_k]_{k=1}$

$$\lambda(P) = \| P \| = \max_{1 \leq k \leq n} \{ \Delta x_k \}$$

لنشكل المجموع التالي:

$$S(f, g; P) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta g(x_k).$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$$

والذي نسميه مجموع ستيلجس للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$

- تكامل ريمان هو حالة خاصة من تكامل ستيلجس

أي الملائم للتجزئة P ..

هو لا يتعلق بالتجزئة ولا بالنقاط الاختيارية أي أن هذه النهاية مستمرة في حال وجدت نهاية مثل J للمجموع S عندما $\lambda(P) \to 0$ مستقلة عن أسلوب تجزئة الفترة $[a, b]$ وعن اختيار النقاط z_k من الفترات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]_{k=1}$ وهنا نقول أن العدد J تكامل ستيلجس للدالة f بالنسبة للدالة g كلها ضمن الفترة $[a, b]$ ونرمز له

$$J = (S)\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{\lambda(p) \to 0} S(f, g; p)$$

أو أحياناً نكتب باختصار

الدالة المستكملة

$$J = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

ونكتب لذلك: $f \in S(g)$

مجموعة تكاملات ستيلجس

ملاحظة:

1) في هذه الحالة / أي بعد التعريف / نقول أيضاً أن تكامل ستيلجس موجود أو أن الدالة f مكاملة بالنسبة لـ g على الفترة $[a, b]$ حسب مفهوم ستيلجس.

* نسمي f الدالة المستكملة و g الدالة المكامل بالنسبة إليها ، $[a, b]$ فترة التكاملة

2) في تكامل ستيلجس إذا وضعنا $g(x) = x$ على $[a, b]$ فإننا نحصل على ما يسمى تكامل ريمان المعروف لدينا. لذا قلنا أن تكامل ريمان حالة خاصة من ستيلجس. وفي هذه الحالة يتحول مجموع ستيلجس التكاملي إلى مجموع ريمان التكاملي.

3) تتعلق قيمة تكامل ستيلجس كما نعلم بـ f, g ومجال التكامل ولا تتعلق برمز المتغير x. وإذا وجد تكامل ريمان فهذا يعني أن تكامل ستيلجس موجود. إلا أن العكس ليس صحيح بشكل عام.

4) يمكن تعميم تكامل ستيلجس على فترات غير محدودة لنحصل على تكاملات ستيلجس المعتلة والتي سوف ندرسها لاحقاً

2 خواص تكامل ستيلجس: (هام) -

ينتج من التعريف مباشرة أن:

1) $J = \int_a^b dg(x) = \left[g(x) \right|_{x=a}^{b} = g(b) - g(a)$. ①

واجب:
أثبت ذلك باستخدام تعريف تكامل ستيلجس.

2) $J = \int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dh(x).$

$= \alpha \int_a^b f\, dh + \beta \int_a^b g\, dh.$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

3) $J = \int_a^b f(x)\, d\left[g_1(x) \pm g_2(x)\right]$

$= \int_a^b f(x)\, dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$

- في كل ما سبق جميع التكاملات المأخوذة في الخواص جميعها موجودة.

4) إذا كانت: $a < c < b$ فإنه:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

مع ملاحظة أنه سيوجد [illegible]
التكامل في الطرف الأيسر لهذه الخاصة ينتج وجود التكاملين في الطرف الأيمن في الحالة العامة ليس العكس صحيح بشكل عام. وهذا خلاف تكامل ريمان.
والمثال التالي يؤكد ذلك: أوجد:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ A & ; \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x < 0 \\ A & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

على $[-1, +1]$